Теоретическое исследование влияния аддитивного шума на морфологический проектор в задаче поиска структурных различий изображений

Корнилов Ф.А.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Отдел прикладных проблем управления

Екатеринбург, 2013

Задача поиска структурных различий

- Рассматриваются два снимка одного и того же участка земной поверхности
- Предполагается, что они геометрически выровнены и имеют одинаковый размер в пикселях
- На этих изображениях требуется найти **структурные** различия

Структурные различия

Описание алгоритма

- Построение проекций $P_f g$ и $P_g f$

$$P_f g(x) = \sum_{i=0}^{255} \left(\frac{\sum_{x' \in X} g(x') \cdot \chi_i^f(x')}{\sum_{x' \in X} \chi_i^f(x')} \cdot \chi_i^f(x) \right)$$

, где $\chi_i^f(x) = \begin{cases} 1, f(x) = i \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$

Проектор усредняет яркости второго изображения по уровням яркости первого.

Описание алгоритма

- Пороговая обработка разностного изображения

$$R = \max\left(\left|P_f g - g\right|, \left|P_g f - f\right|\right)$$

- Если яркость некоторого зафиксированного пикселя *R* (x_c) превосходит порог, то в этой точке *локализовано* структурное различие
- Если количество точек, яркость которых превосходит порог, больше некоторого заданного значения, то можно говорить об *обнаружении* структурного различия изображений в целом

Структура изображений

Опр1. *Структура изображения f* – это семейство $\pounds_f = \{L_f(i)\}_i$ множеств уровня $L_f(i) = \{x \in X \mid f(x) = i\}$

Опр2. Структура изображения *f не сложнее* структуры изображения *g*

$$\pounds_f \preceq \pounds_g$$

если для каждого значения яркости *f* найдется разбиение

$$L_f(i) = \bigcup_{j=1}^{n} L_g(i_j),\ n \geq 1,\ \text{причем}\ i_k \neq i_l\ \forall k, l \in [1, n].$$

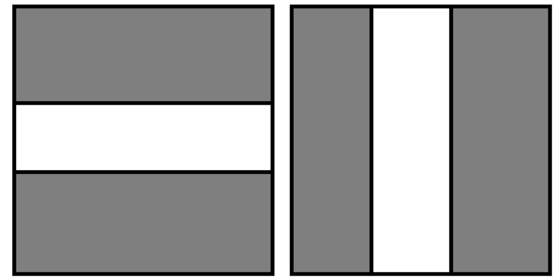
Утверждение. $\pounds_f \preceq \pounds_g$ тогда и только тогда, когда $f = P_g f$.

Структура изображений

Варианты соотношения структур изображений:

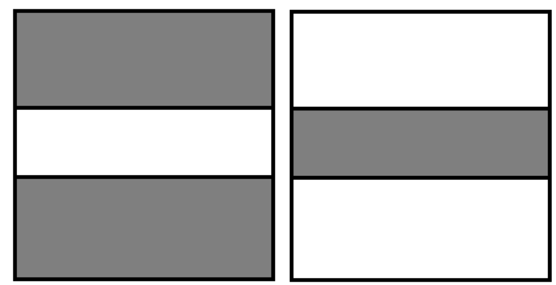
1. Изображения *f* и *g* не сравнимы:

$$\mathcal{L}_f \npreceq \mathcal{L}_g \text{ и } \mathcal{L}_g \npreceq \mathcal{L}_f.$$



2. Изображения *f* и *g* изоморфны:

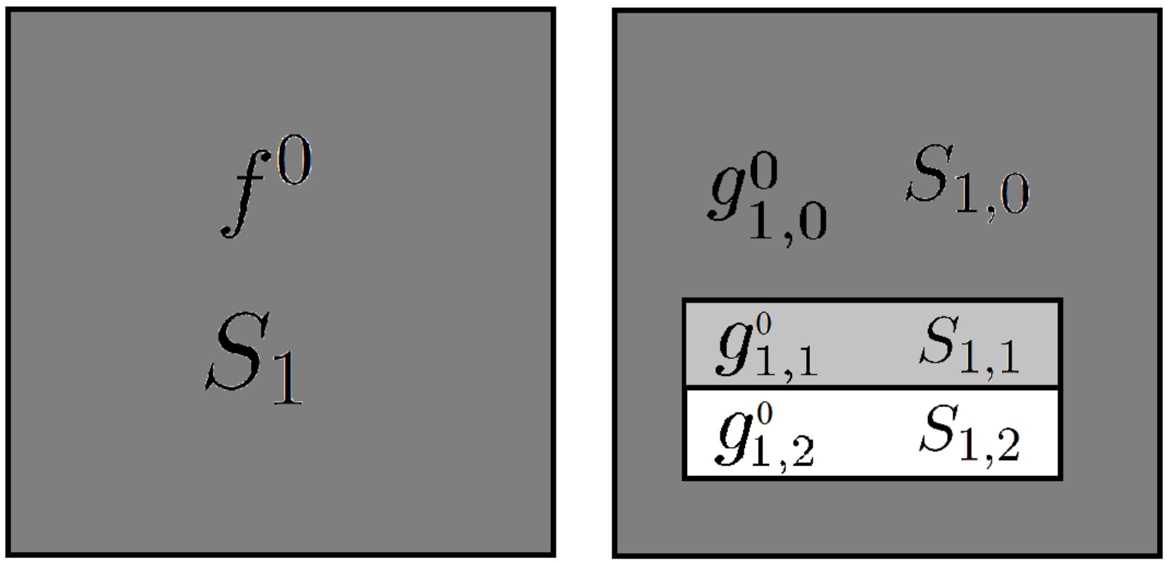
$$\mathcal{L}_f \preceq \mathcal{L}_g \text{ и } \mathcal{L}_g \preceq \mathcal{L}_f.$$



3. Строгая сравнимость: для изображений *f* и *g* выполнено либо

$\mathcal{L}_f \preceq \mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_g \npreceq \mathcal{L}_f$, либо $\mathcal{L}_f \npreceq \mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_g \preceq \mathcal{L}_f$.

Теоретическое исследование алгоритма.
Модель изображений



Изображение f:
1 уровень

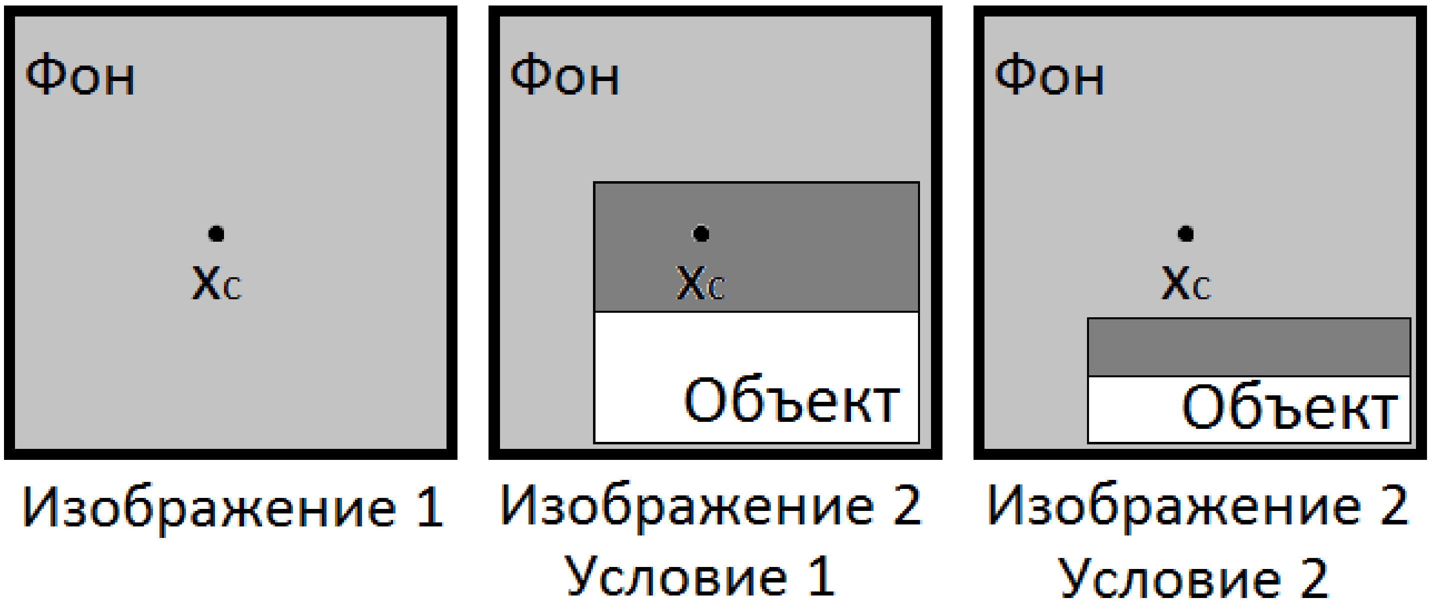
Изображение g:
1 уровень фона,
2 уровня объекта

К каждому изображению добавляется стационарный и независимый в каждой точке аддитивный шум с известными параметрами. В результате имеем два семейства случайных величин: $f = \{f(x_i)\}_{i=1}^{S}$ и $g = \{g(x_i)\}_{i=1}^{S}$ Поскольку такие изображения – случайные поля, то и R(xc) является случайной величиной.

Теоретическое исследование алгоритма

Задача: построить алгоритм расчета условных вероятностей величины яркости разностного изображения в зафиксированном пикселе:

1. $p(R(x_c) = i \mid в\ x_c\ есть\ структурное\ различие) \triangleq r^+(i)$
2. $p(R(x_c) = i \mid в\ x_c\ нет\ структурного\ различия) \triangleq r^-(i)$

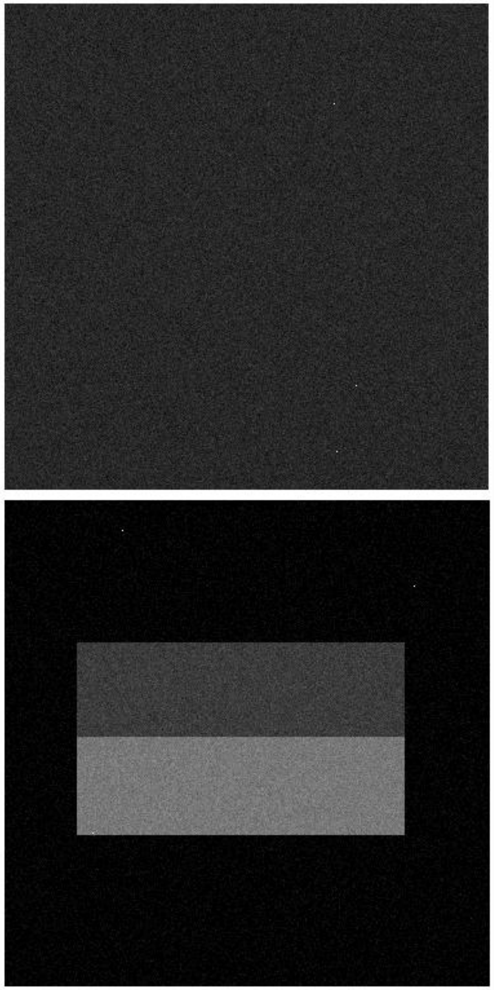


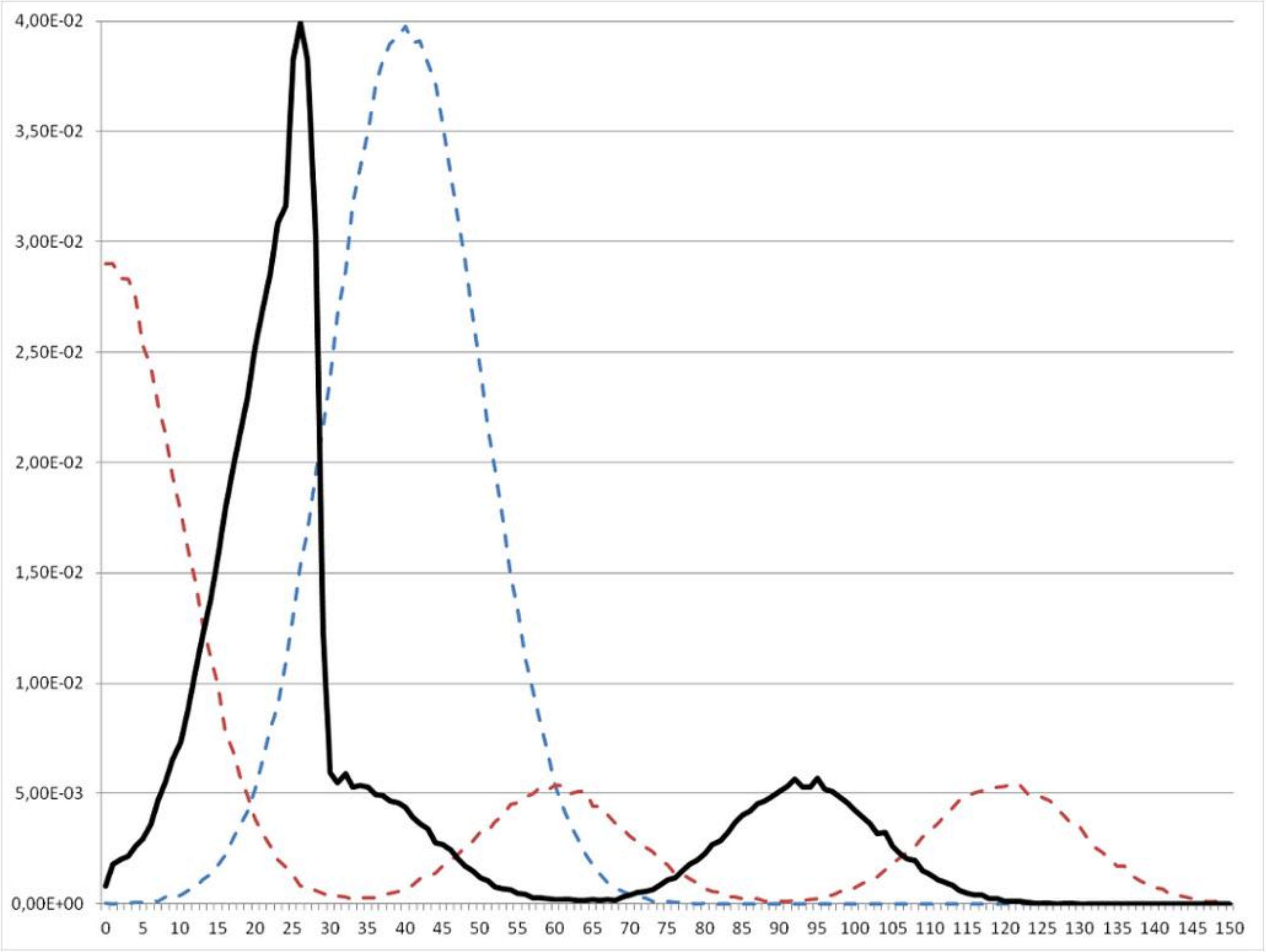
Оптимальный порог

Теорема. Оптимальный порог алгоритма поиска структурных различий на основе морфологического проектора вычисляется по следующей формуле

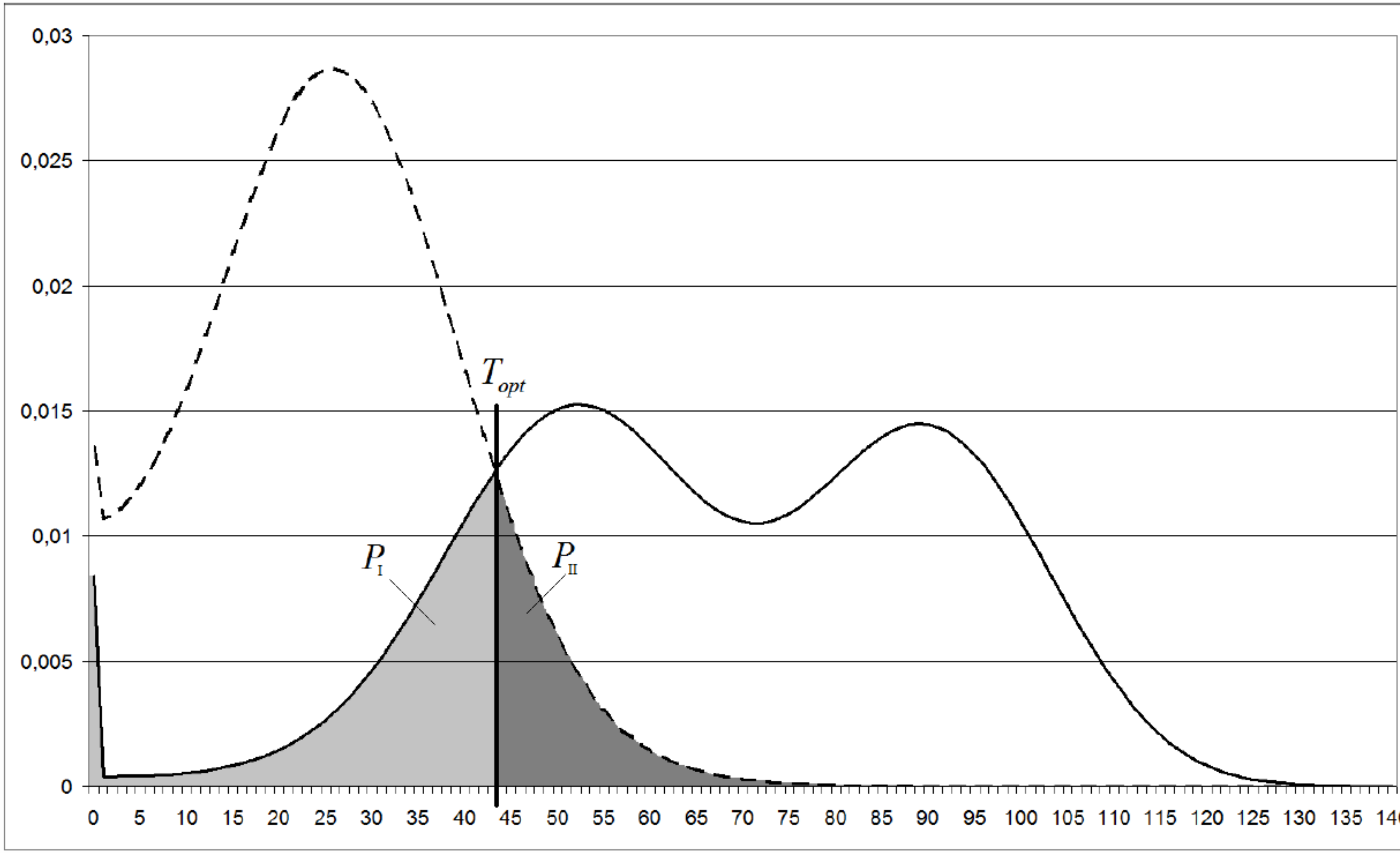
$$T_{opt} = \arg\min_{T}\Big(\sum_{i<T} r^{+}(i) + \sum_{i>T} r^{-}(i)\Big).$$

Оптимальный порог





Оптимальный порог

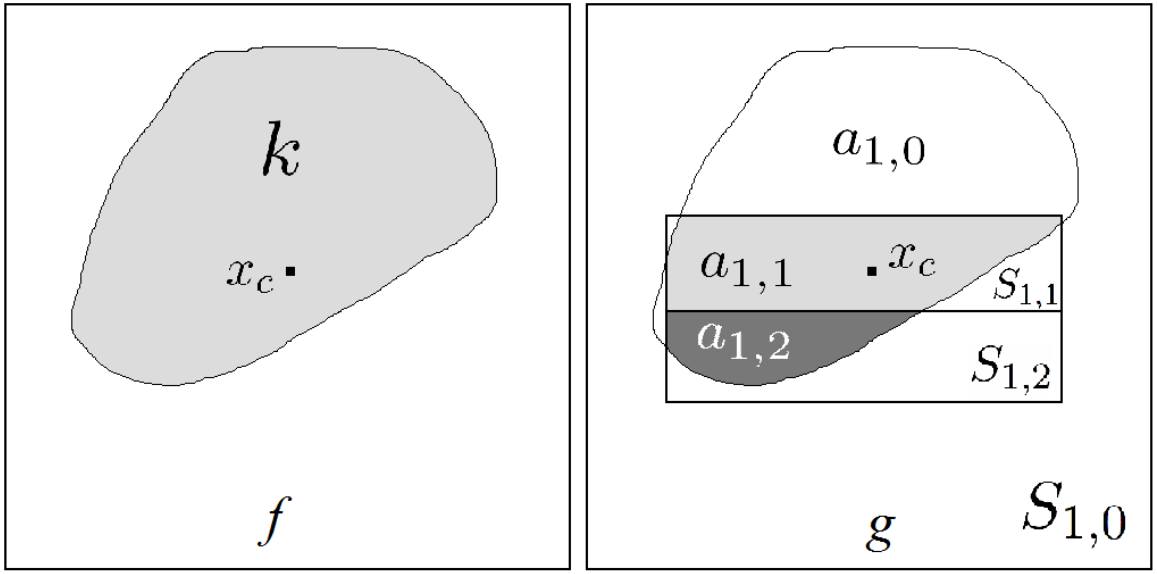


Оптимальный порог $T_{opt} = 43$. Оценки ошибок: $P_{\text{I}} = 0.15$, $P_{\text{II}} = 0.1$.

Распределения для уровней яркости

Теорема. Пусть в точке x_c есть структурное различие и выполнено:

1. Зафиксированный пиксель на первом изображении принадлежит уровню яркости *n*, а на втором – уровню яркости объекта с номером *m*.
2. Уровень яркости первого изображения, содержащий x_c, сотоит из k пикселей.
3. Конфигурация (набор $a_{q,j}$) этого уровня такова:



Т.е.:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_g^q} a_{q,j} = k-1, \\ 0 \le a_{q,j} \le S_{q,j}, \quad \forall (q,j)\colon q \in [1, N_f], j \in [0, N_g^q], \quad (q,j) \ne (n,m), \\ 0 \le a_{n,m} \le S_{n,m} - 1. \end{array}\right\}$$

Распределения для уровней яркости

Итоговая формула:

$$p_{ka}^{n,m} = \sum_i \Big(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i))$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} B(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i)) \cdot B(a_{n,m}, S_{n,m}-1, p_n(f=i)) \cdot \prod_{j=m+1}^{N_g^n} B(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i))$$

$$\times \prod_{q=n+1}^{N_f} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i)) \Big)$$

Здесь $B(x,n,p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ - биномиальное распределение вероятностей.

При отсутствии структурного различия эта вероятность имеет похожую формулу (с $m = 0$).

Распределение яркости разностного изображения

Теорема. При наличии структурного различия условная вероятность яркости зафиксированного пикселя разностного изображения имеет вид

$$r^{+}(i) = \frac{\sum_{n=1}^{N_f} \sum_{m=1}^{N_g^n} (S_{n,m} \cdot r_{n,m}(i))}{\sum_{u=1}^{N_f} \sum_{v=1}^{N_g^u} S_{u,v}},$$

где

$$r_{n,m}(i) = \sum_{k,a} (p_{ka}^{n,m} \cdot p(|G_{ka}^{n,m} + E_k| = i)),$$

$$G_{k,a}^{n,m} = \frac{1}{k} \cdot \Big(\sum_{q=1}^{N_f} \sum_{j=0}^{N_g^q} (a_{q,j} \cdot g_{q,j}^0) + (1-k) \cdot g_{n,m}^0\Big), \quad E_k = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j + \frac{1-k}{k} \cdot \varepsilon_c,$$

ε_j - распределение вероятностей яркости *j*-ой точки второго изображения, соответствующей уровню яркости зафиксированного пикселя.

При отсутствии структурного различия условная вероятность $r^{-}(i)$ имеет похожую формулу (с $m = v = 0$).

Выводы

1. Получены и статистически проверены аналитические выражения для условных распределений яркости зафиксированного пикселя разностного изображения.
2. Полученные формулы позволяют точно вычислить оптимальный порог для некоторого класса входных данных в отличии от прямого статистического эксперимента, в котором фиксируется пара изображений и точность результата которого напрямую зависит от объема эксперимента.
3. Направления дальнейших исследований:

- построение вычислительно «быстрых» аппроксимационных выражений;
- построение формул распределений для других алгоритмов поиска структурных различий изображений.

Спасибо за внимание