

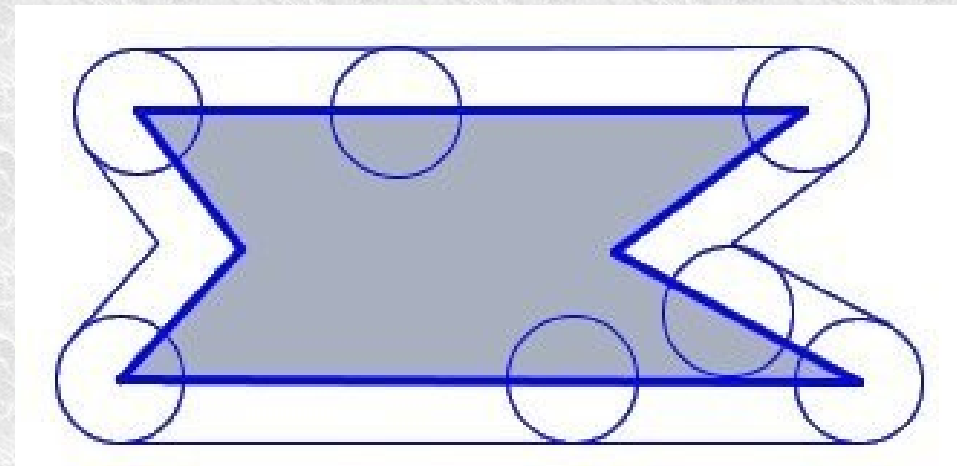
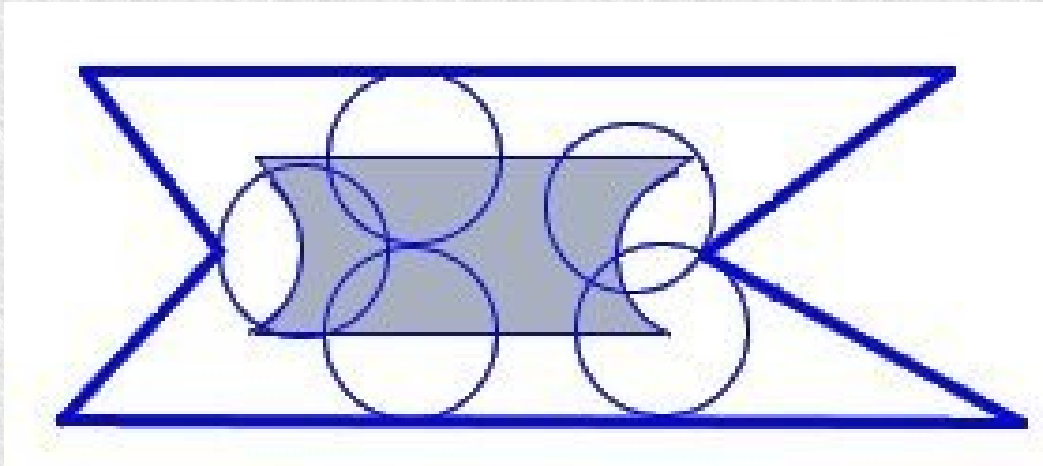
Непрерывные модели морфологических операций

Макарова Е.Ю., Местецкий Л.М.

Москва, ВМК МГУ

Морфология Серра. Эрозия и дилатация

- Перенос множества X на вектор z : $X_z = \{y | x \in X, y = x + z\}$
- Эрозия множества X с примитивом B : $X \ominus B = \{z | B_z \subset X\}$
- Дилатация множества X с примитивом B : $X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\}$



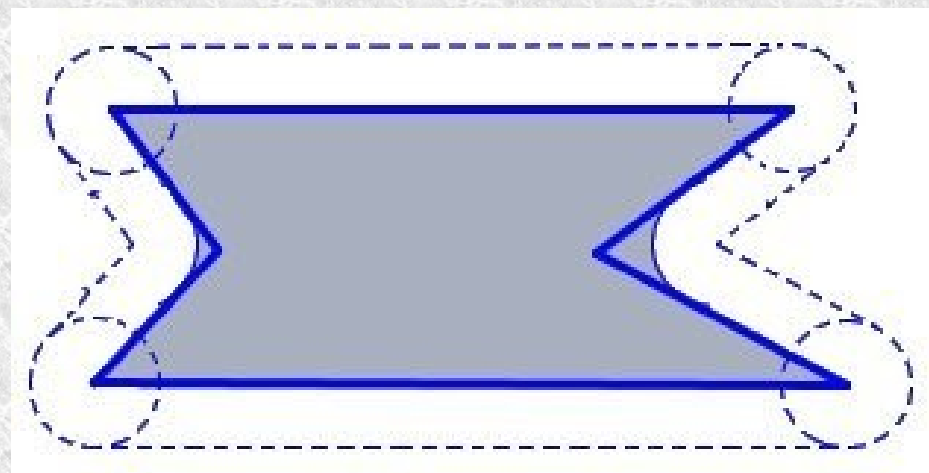
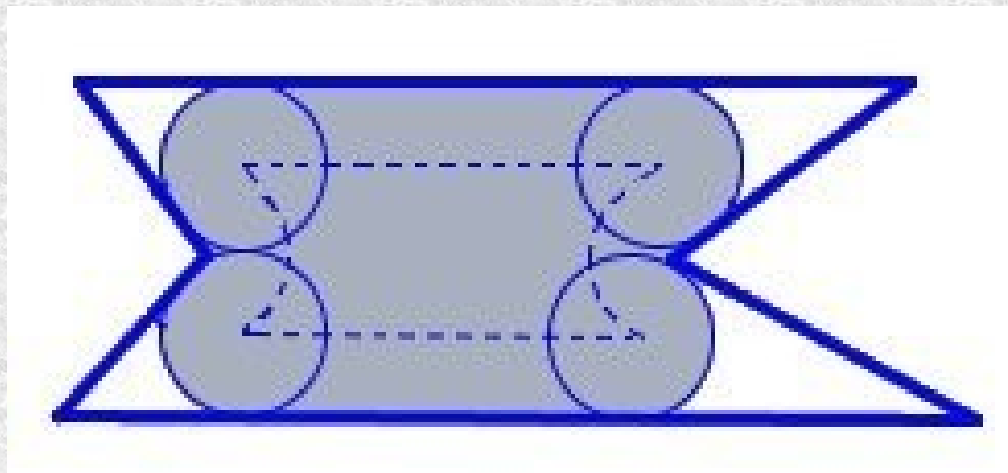
Морфология Серра. Открытие и закрытие

- Открытие множества X с примитивом B :

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \{x | x \in B_z, B_z \subset X\}$$

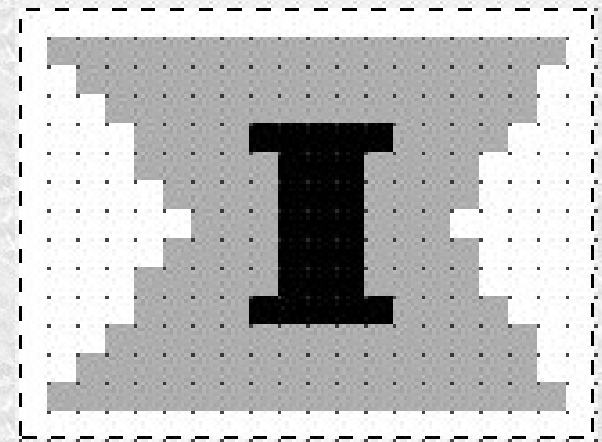
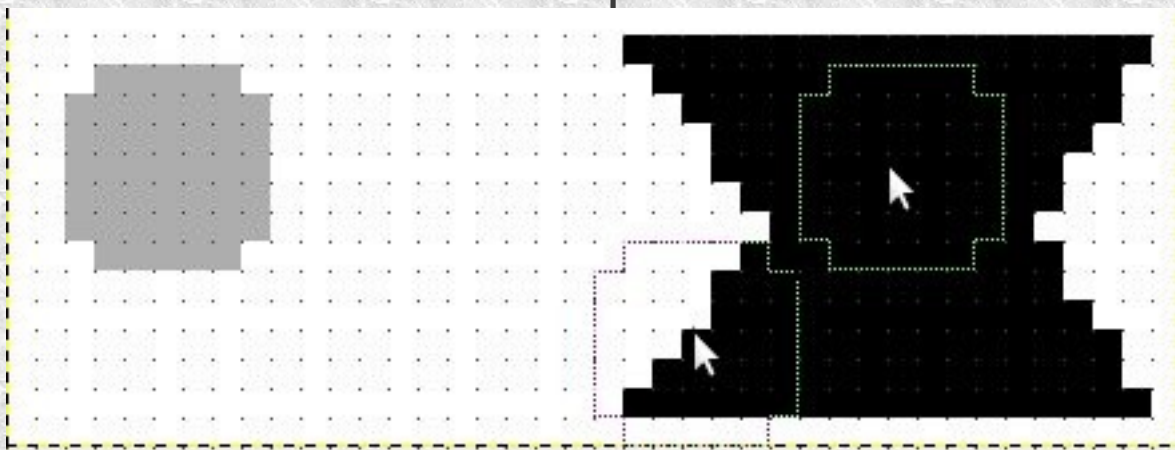
- Закрытие множества X с примитивом B :

$$X \cdot B = (X \oplus B) \ominus B = \{x | B_x \subset \{x + b | x \in X, b \in B\}\}$$



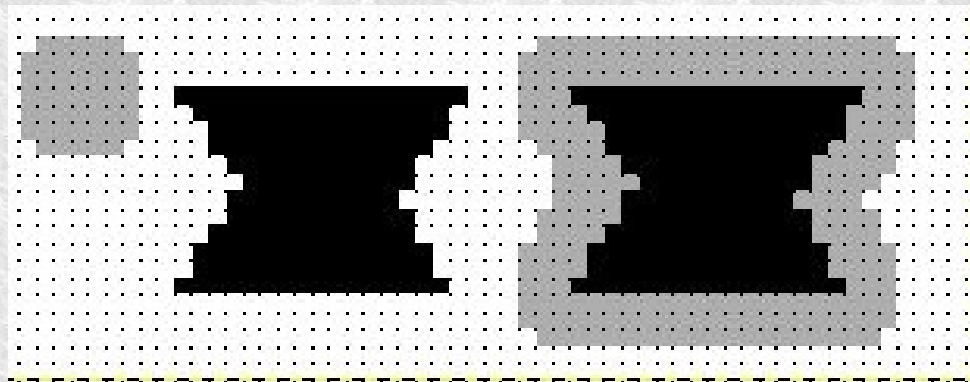
Морфология Серра. Дискретный подход

- Изображение — множество черных пикселей на белом фоне X
- Примитив — множество черных пикселей на белом фоне, выбран центральный пиксель B
- Эрозия:
 - Для каждого пикселя изображения z
 - Сдвигаем примитив так, чтобы этот пиксель совпал с центральным B_z
 - Если $X \cap B_z = B_z$, то пиксель z черный, иначе — белый
 - Все пиксели фона — белые



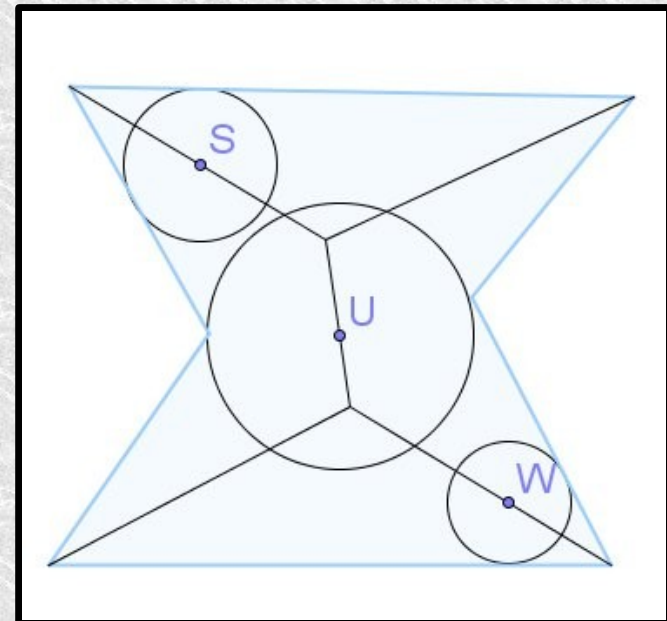
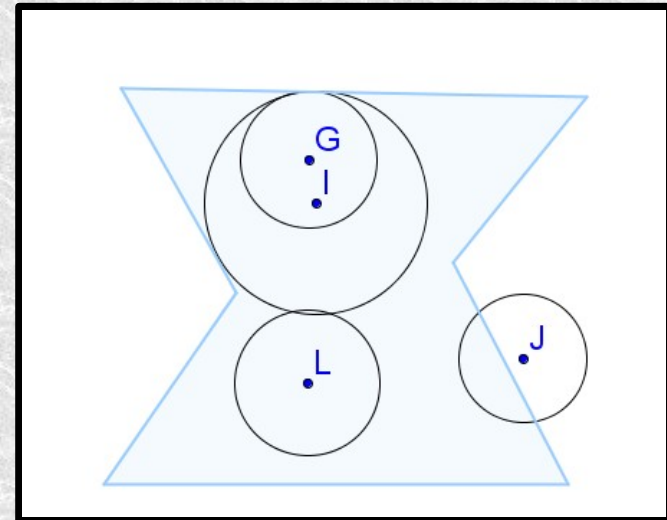
Морфология Серра. Дискретный подход

- Дилатация:
 - Для каждого пикселя фона изображения z
 - Сдвигаем примитив так, чтобы этот пиксель совпал с центральным B_z
 - Если $X \cap B_z \neq \emptyset$, то пиксель z черный, иначе — белый
 - Все пиксели исходного изображения — черные
- Для эрозии число проверяемых пикселей пропорционально числу пикселей изображения, для дилатации — числу пикселей фона



Скелетное описание формы

- *Пустой круг* — круг, полностью расположенный внутри многоугольной фигуры.
- *Максимальный пустой круг* — пустой круг, не содержащийся ни в одном другом пустом круге.
- *Скелет* ($Sk(X)$) — множество центров максимальных пустых кругов
- *Радиальная функция точки скелета* ($\rho(S)$) — радиус максимального пустого круга с центром в этой точке



Непрерывная модель морфологии Серра

- Дано: многоугольная фигура; примитив — круг с центром в начале координат.
- Надо: построить результат применения морфологической операции к фигуре
- Предполагаемое решение:
 - Построить скелет фигуры (с радиальными функциями)
 - По скелету фигуры построить скелет результата операции
 - Построить огибающую нового скелета
- $B(r)$ — круг радиуса r с центром в начале координат

Непрерывная модель эрозии

• Скелетная эрозия: $X \ominus_{Sk} B(r) = \bigcup_{C \in Sk(X), \rho(C) \geq r} B_C(\rho(C) - r)$

• **Теорема 1.** $X \ominus_{Sk} B(r) = X \ominus B(r)$

• **Схема доказательства.**

• X — круг радиуса R с центром в O

• $R < r$: $\forall z B_z \not\subset X$, значит $X \ominus B(r) = \emptyset$

$Sk(X) = \{O\}$; $\rho(O) = R < r$, значит $X \ominus_{Sk} B(r) = \emptyset$

• $R = r$: $\exists! z : B_z \not\subset X$, т.е. $X \ominus B(r) = \{O\}$

$X \ominus_{Sk} B(r) = B_O(\rho(O) - r) = B_O(0) = \{O\}$

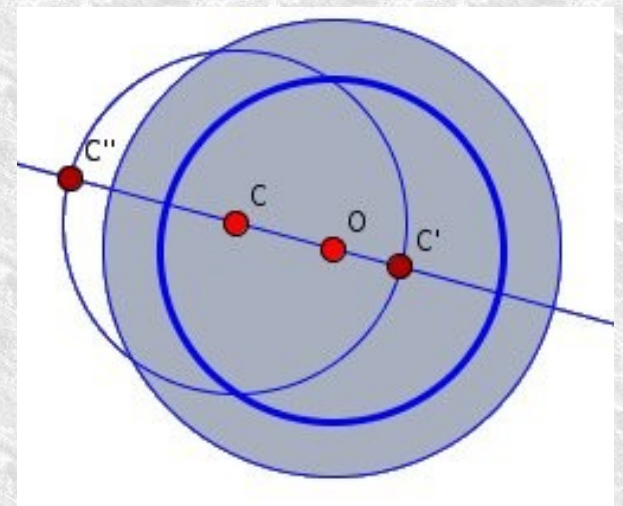
• $R > r$: $C \in X$; $C', C'' = B_C(r) \cap OC$;

$|OC'| = ||OC| - r|$; $|OC''| = |OC| + r$;

$C'' \in X \Leftrightarrow OC < R - r \Rightarrow B_C(r) \subset X \Rightarrow$

$\Rightarrow X \ominus B(r) = B_O(R - r)$

$X \ominus_{Sk} B(r) = B_O(\rho(O) - r) = B_O(R - r)$



Непрерывная модель эрозии

- **Схема доказательства (продолжение):**

$$X = \bigcup_{S \in Sk(X)} B_S(\rho(S)), X' = X \ominus_{Sk} B(r)$$

$$C \in X. H = \{A \mid A \in Sk(X), C \in B_A(\rho(A))\}$$

Если $C \in X'$, то $\exists A_1 \in H : C \in B_{A_1}(\rho(A_1) - r)$.

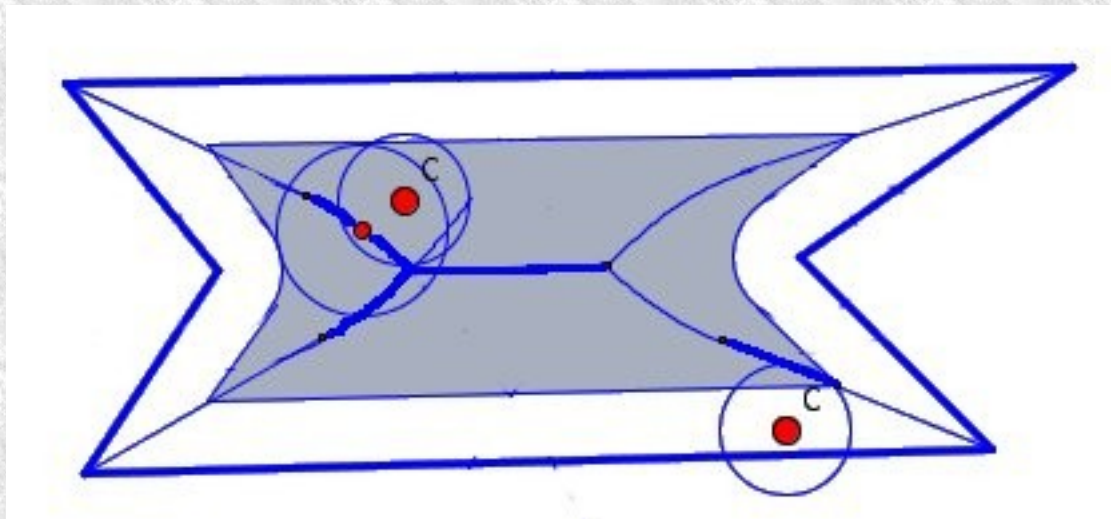
Тогда $B_C(r) \subset B_{A_1}(\rho(A_1)) \subset X \Rightarrow C \in X \ominus_{Sk} B(r)$

Если $C \notin X'$, то $\forall A \in Sk(X) C \notin B_A(\rho(A) - r)$.

$\forall D \in Sk(X) : B_C(r) \not\subset B_D(\rho(D))$.

Тогда если $B_C(r) \subset X$, $B_C(r)$ – максимальный круг,

$C \in Sk(X)$, $\rho(C) = r \Rightarrow C \in X'$. Значит, $B_C(r) \not\subset X$, т.е. $C \notin X \ominus B(r)$



Свойства эрозии

- Для многоугольной фигуры X
- Граница $X \ominus B(r)$ состоит из отрезков прямых и вогнутых внутрь фигуры дуг окружностей
- Из связности или не связности X не следует связность или несвязность $X \ominus B(r)$
- **Теорема 2.** $Sk(X \ominus B(r)) = \{S \in Sk(X) : \rho(S) \geq r\} \subset Sk(X)$
- **Схема доказательства:**
 1. Пусть $S_1 \in Sk(X \ominus B(r))$, $S_1 \notin \{S \in Sk(X) : \rho(S) \geq r\}$. $\rho'(S_1) \geq 0$ в $X \ominus B(r)$
 2. $S_1 \in Sk(X)$ $\rho(S_1) \geq r \Rightarrow S_1 \in \{S \in Sk(X) : \rho(S) \geq r\}$, т.е. противоречие
 3. $S_1 \notin Sk(X) \Rightarrow B(r) \ni S_1 \in B_{S_2}(\rho(S_2))$,
 $B_{S_1}(\rho'(S_1) + r) \subset B_{S_2}(\rho(S_2))$.
Тогда $\rho(S_2) > \rho'(S_1) + r \geq r \Rightarrow S_2 \in Sk(X \ominus B(r))$.
Но тогда $B_{S_1}(\rho'(S_1)) \subset B_{S_2}(\rho'(S_2))$, т.е. $S_1 \notin Sk(X \ominus B(r))$

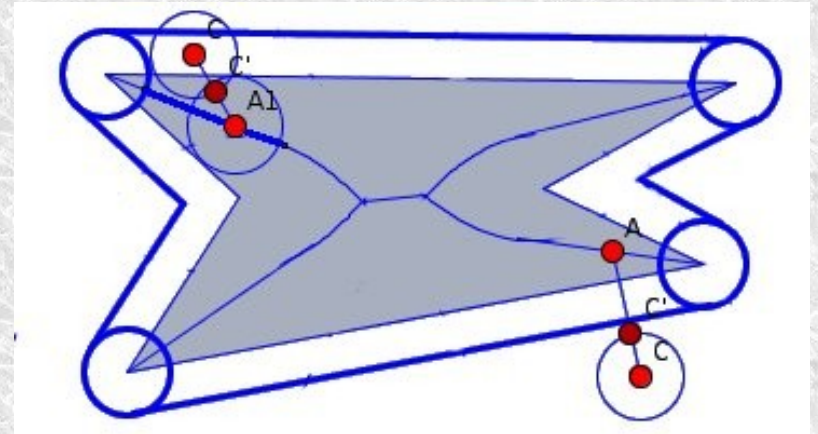
Непрерывная модель дилатации

- Скелетная дилатация:

$$X \oplus_{Sk} B(r) = \bigcup_{C \in Sk(X)} B_C(\rho(C) + r)$$

- **Теорема 3.** $X \oplus_{Sk} B(r) = X \oplus B(r)$

- **Схема доказательства**



- X — круг радиуса R с центром в точке O ,

$$X \oplus_{Sk} B(r) = B_O(R+r) = X \oplus B(r)$$

- X — произвольная многоугольная фигура; $X' = X \oplus_{Sk} B(r)$

$$C \in X'; H = \{A | A \in Sk(X), C \in B_A(\rho(A) + r)\}$$

$$A_1 \in H; C' \in CA_1, CC' = r.$$

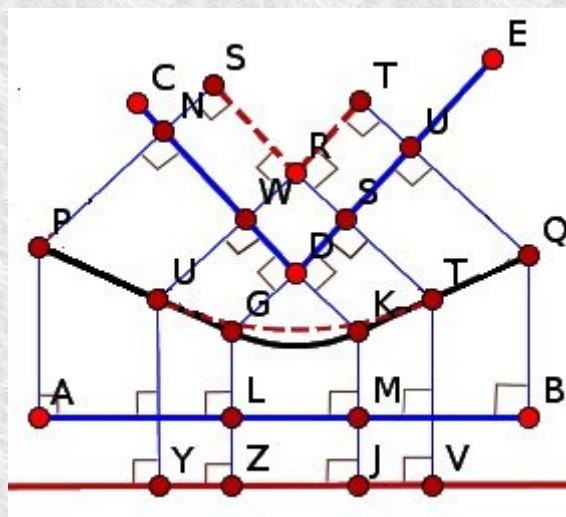
$$A_1 C \leq \rho(A_1), \text{ т.е. } C' \in B_{A_1}(\rho(A_1)), C \in B_{C'}(r), C \in X \oplus B(r)$$

$$C \notin X'; \forall A \in Sk(X) C \notin B_A(\rho(A) + r)$$

$$\forall A \in Sk(X) C'(A) \in CA, CC' = r \Rightarrow C'A > \rho(A), C' \notin X \Rightarrow C \notin X \oplus B(r)$$

Свойства дилатации

- Граница $X \oplus B(r)$ состоит из отрезков прямых и выгнутых наружу дуг окружностей
- Если фигура X связна, то $X \oplus B(r)$
- **Замечание.** Если многоугольная фигура X не является выпуклой, $Sk(X)$ не обязательно является подмножеством $Sk(X \oplus B(r))$ и не обязательно содержит $Sk(X \oplus B(r))$



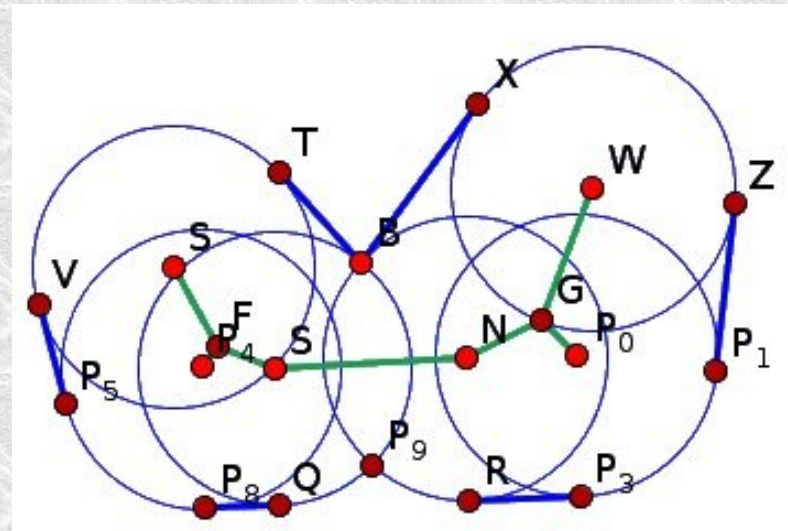
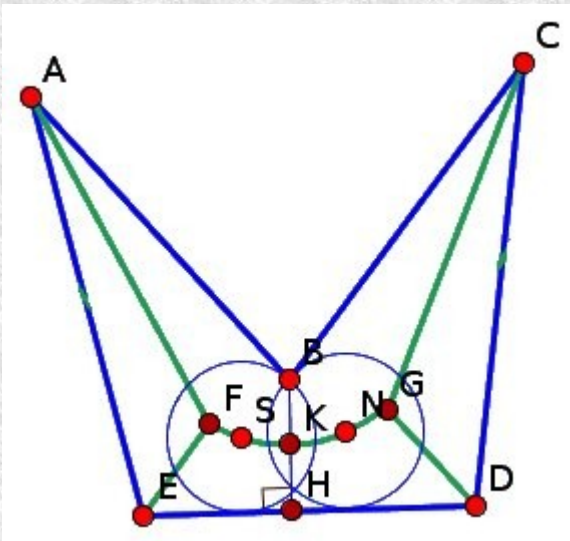
Непрерывная модель открытия

- Открытие — результат последовательного применения эрозии и дилатации.
- Определим скелетное открытие как последовательное применение скелетной эрозии и скелетной дилатации
- Скелетная эрозия и скелетная дилатация эквивалентны соответствующим операциям, значит, скелетное открытие эквивалентно открытию

$$X \circ B(r) = (X \ominus B(r)) \oplus B(r) = \bigcup_{C \in Sk(X): \rho(C) \geq r} B_C(\rho(C))$$

Свойства открытия

- Граница $X \circ B(r)$ состоит из отрезков и выгнутых наружу дуг окружностей
- Если X было связным множеством, открытие X связным может не быть. Если открытие X связно, X не обязательно было СВЯЗНЫМ
- $Sk(X \ominus B(r)) \subseteq Sk(X \circ B(r))$
 $Sk(X \ominus B(r)) \neq Sk(X \circ B(r)), Sk(X \circ B(r)) \not\subseteq Sk(X)$



Непрерывная модель закрытия

- Закрытие — комбинация дилатации и эрозии
- Скелет дилатации не обязательно является подмножеством скелета исходной фигуры
- Объединение кругов при эрозии происходит по скелету дилатации

$$X \cdot B(r) = (X \oplus B(r)) \ominus B(r) = \bigcup_{C \in Sk(X \oplus B(r)) : \rho'(C) \geq r} B_C(\rho'(C))$$

- Таким образом, более простым является применение операции открытия к фону, чем операции закрытия к самой фигуре X

Свойства закрытия

- Граница закрытия состоит из отрезков прямых и вогнутых внутрь дуг окружностей
- Если фигура X была связной, ее закрытие тоже связное
- Скелет закрытия — подмножество скелета дилатации

Оценка скорости выполнения морфологических операций для непрерывной модели

Общий порядок выполнения морфологической операции:

- 1) Построить скелет многоугольной фигуры
 - 2) Применить непрерывную морфологическую операцию
 - Результат — семейство кругов с известными положениями центров и радиусами, однако не обязательно круги являются максимальными пустыми кругами результирующей фигуры
 - 3) Построить огибающую семейства кругов
- Если морфологическая операция — эрозия, дилатация или открытие, время ее выполнения — $O(m)$, где m — число ребер скелета
 - Дилатация: увеличить радиальную функцию в каждой вершине на r

Алгоритмы эрозии и открытия с примитивом $V(r)$

- Для каждого ребра
 - Если радиальная функция на одном конце ребра больше r , на другом — меньше, найти точку на ребре, в которой она равна r , добавить эту точку в множество вершин, ребро разбить на два
 - Если радиальная функция на обоих концах ребра больше r , но минимум радиальной функции на ребре меньше r , то найти пару точек, в которых радиальная функция равна r , добавить их в множество вершин, ребро разбить на три
 - Те ребра, на которых радиальная функция не превышает r — удалить
- Удалить вершины, в которых радиальная функция меньше r
- *(только для эрозии) В оставшихся вершинах уменьшить значение радиальной функции на r .*

Выводы

- Существуют непрерывные модели морфологических операций для многоугольных фигур с кругом в качестве примитива.
- Если построен скелет многоугольной фигуры, то время построения ее эрозии/дилатации/открытия $O(m)$, где m — число ребер скелета
- Непрерывное представление морфологических операций позволяет получить семейство фигур X от $B(r)$ при использовании примитива $B(r)$ с различными значениями r